Geometria Para leigos

Entender e estudar geometria proveitosamente envolve usar estratégias nas provas geométricas, conhecer equações importantes e ser capaz de identificar símbolos comumente usados.

FÓRMULAS GEOMÉTRICAS E OUTROS TÓPICOS QUE VOCÊ PRECISA SABER

O que se segue são mais de três dúzias dos principais teoremas, fórmulas, propriedades, e assim por diante, que você usa para fazer cálculos. Se ficar atrapalhado ao trabalhar em um problema geométrico e não conseguir encontrar uma fórmula, este é o lugar para procurar.

PAPO DE TRIÂNGULOS

- **Soma dos ângulos internos de um triângulo:** 180º
- **Área: Área$_{\Delta}$ = $\frac{1}{2}$base x altura**
- **Fórmula de Herão: Área$_{\Delta}$ = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, em que a, b e c são os comprimentos dos lados do triângulo e $p = \frac{a+b+c}{2}$ (p é o semiperímetro, metade do perímetro)**
- **Área de um triângulo equilátero: Área$_{\text{Equilátero}\Delta}$ = $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, em que a é o lado do triângulo**
- **O Teorema de Pitágoras:** $a^2 + b^2 + c^2$, em que a e b são os catetos de um triângulo retângulo e c é a hipotenusa
- **Triplos pitagóricos comuns (comprimentos dos lados em triângulos retângulos):**
  - 3–4–5
  - 5–12–13
  - 7–24–25
  - 8–15–17
- **Proporções dos lados em triângulos retângulos especiais:**
  - Os lados opostos aos ângulos em um triângulo de 45º–45º–90º estão em proporção de $1:1:\sqrt{2}$.
  - Os lados opostos aos ângulos em um triângulo de 30º–60º–90º estão em proporção de $1:\sqrt{3}:2$.
- **Teorema da altura relativa à hipotenusa:** Se você traçar a altura a partir da hipotenusa de um triângulo retângulo, então:
  - Os dois triângulos formados são semelhantes aos triângulos dados e um ao outro: $\Delta ACB \sim \Delta ADC \sim \Delta CDB$
  - $h^2 = xy$
  - $h^2 = xy$ e $b^2 = xc$

Geometria Para leigos

PAPO DE POLÍGONOS

- **Fórmulas de área:**
  - **Paralelogramo:** Área = base x altura
  - **Retângulo:** Área = base x altura
  - **Deltoide (ou pipa) ou losango:** Área = $\frac{1}{2}$ diagonal$_1$ x diagonal$_2$
  - **Quadrado:** $\frac{1}{2}d_1d_2$
  - **Trapézio:** Área = $\dfrac{\text{base}_1 + \text{base}_2}{2}$ x altura
  - **Polígono regular:** Área = $\frac{1}{2}$ perímetro x apótema
- **Soma dos ângulos internos de um polígono de *n*-lados:** $\text{Soma}_{\text{Ângulo interno}} = (n - 2)180°$
- **Medida de cada ângulo interno de um polígono (ou outros equiangulares) de *n*-lados:**

  $\text{Medida}_{\text{Ângulo interno}} = \dfrac{(n-2)180°}{n}$ **ou** $180 - \dfrac{360°}{n}$ **(o suplementar de um ângulo externo)**
- **Soma dos ângulos externos (de cada vértice) de qualquer polígono:** $\text{Soma}_{\text{Ângulo externo}} = 360°$
- **Medida de cada ângulo externo de um polígono (ou outros equiangulares) regular de *n*-lados:** $\text{Medida}_{\text{Ângulo externo}} = \dfrac{360°}{n}$
- **Número de diagonais que podem ser traçadas dentro de um polígono de *n*-lados:** Número de diagonais = $\dfrac{n(n-3)}{2}$

PAPO DE CÍRCULOS

- **Circunferência:** $C = 2\pi r$ ou πd, em que *r* é o raio do círculo e *d* é o diâmetro
- **Área:** $\text{Área}_{\text{Círculo}} = \pi r^2$
- **Comprimento do arco:** O comprimento de um arco (parte da circunferência) é igual à circunferência do círculo ($2\pi r$) vezes a fração do círculo representada pelo arco.

  Comprimento do arco = $\left(\dfrac{\text{grau do arco}}{360°}\right) \times 2\pi r$
- **Área do setor:** A área de um setor (como o formato de uma fatia de pizza cortada de um círculo) é igual à área do círculo (πr^2) vezes a fração do círculo representada pelo setor.

  $\text{Arco}_{\text{Setor}} = \left(\dfrac{\text{grau do arco do setor}}{360°}\right) \times \pi r^2$
- **Medida de um ângulo...**
  - ***De* um círculo:** $\text{Medida}_{< \text{ de um círculo}} = \frac{1}{2}$(medida do arco)

- ***Dentro de* um círculo:** Medida$_{\angle \text{ dentro de um círculo}} = \frac{1}{2}$(medida do arco + medida do arco do ângulo vertical)
- ***Fora de* um círculo:** Medida$_{\angle \text{ fora de um círculo}} = \frac{1}{2}$ (medida do arco maior – medida do arco menor)

- **Teorema das cordas: Quando duas cordas de um círculo se cruzam, o produto das partes de uma corda é igual ao produto da outra.**
- **Teorema da secante-tangente: Quando uma tangente e uma secante de um círculo se encontram em um ponto externo, a medida da tangente ao quadrado é igual ao produto da parte externa da secante e seu comprimento total.**
- **Teorema das secantes: Quando duas secantes de um círculo se encontram em um ponto externo, o produto da parte externa de uma secante e seu comprimento total é igual ao produto da parte externa da outra secante e seu comprimento total.**

PAPO DE GEOMETRIA 3D

- **Formas com topo plano (prismas e cilindros):**
  - **Volume:** $\text{Vol}_{\text{Topo plano}} = \text{área}_{\text{Base}} \times \text{altura}$
  - **Área da superfície:** $\text{AS}_{\text{Topo plano}} = 2 \times \text{área}_{\text{Base}} + \text{área}_{\text{Retângulos laterais}}$

    O comprimento do único retângulo lateral que envolve o cilindro é igual à circunferência da sua base; sua largura é a altura do cilindro.
- **Formas pontiagudas (pirâmides e cones):**
  - **Volume:** $\text{Vol}_{\text{Pontiagudo}} = \frac{1}{3}\,\text{área}_{\text{Base}} \cdot \text{altura}$
  - **Área da superfície:** $\text{SA}_{\text{Pontiagudo}} = \text{área}_{\text{Base}} + \text{área}_{\text{Triângulos laterais}}$

    A base de cada triângulo lateral é o lado da base da pirâmide, e a altura do triângulo é a altura inclinada da pirâmide. Quanto ao cone, um “triângulo” o envolve; sua base é igual à circunferência da base do cone, e sua altura é igual à altura inclinada do cone, conhecida como geratriz.
- **Esfera:**
  - **Volume:** $\text{Vol}_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$
  - **Área da superfície:** $\text{AS}_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2$

PAPO DE GEOMETRIA DE COORDENADAS

- **Fórmula da inclinação: Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), a inclinação da reta que atravessa pelos dois pontos é $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$**

Não importa quais pontos são designados como (x_1, y_1), e quais como (x_2, y_2).

- A inclinação de retas paralelas é idêntica.
- As inclinações de retas perpendiculares são opostos recíprocos, ou seja, *m2 = -1/m1*.

- **Fórmula do ponto médio:** Dado um segmento com pontos finais (x_1, y_1) e (x_2, y_2), as coordenadas do ponto médio são (x, y) = $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

  Não importa quais pontos são (x_1, y_1) e quais são (x_2, y_2).

- **Fórmula da distância:** Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), a distância entre eles é d = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Não importa quais pontos sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

- **Equações da reta:**
  - **Forma inclinação-interseção:** $y = mx + b$, em que *m* é a inclinação e *b* é onde *y* é interceptado
  - **Forma ponto-inclinação:** $y - y_1 = m(x - x_1)$, em que *m* é a inclinação e (x_1, y_1) é o ponto de uma reta
  - **Reta horizontal:** $y = b$, em que *b* é onde *y* é interceptado, ou seja, o ponto (0, *b*)
  - **Reta vertical:** $x = a$, em que *a* é onde *x* é interceptado, ou seja, o ponto (*a*, 0)

- **Equações do círculo:** $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, em que ($h$, k) é o centro do círculo e *r* é seu raio

ESTRATÉGIAS EM PROVAS GEOMÉTRICAS

Saber escrever provas geométricas de duas colunas confere uma base sólida para trabalhar com teoremas. Praticar estas estratégias o ajudará a escrever provas facilmente em pouco tempo:

- Trace uma estratégia. Descubra como passar dos dados para a conclusão da *prova* com um simples argumento em português antes de se preocupar em escrevê-la formalmente.
- Invente números para segmentos e ângulos. Durante o estágio da estratégia, às vezes é útil criar medidas para ângulos e comprimentos para segmentos arbitrários. Fazer as contas com esses números (adição, subtração, multiplicação ou divisão) o faz entender como a prova funciona.
- Procure triângulos congruentes (e tenha o PCTCC em mente). Nos diagramas, encontre *todos* os pares de triângulos congruentes. Provar um ou mais desses pares (com LLL, LAL, ALA, AAL ou HCR) provavelmente será uma parte importante da prova. Então você certamente aplicará o PCTCC à reta após provar que os triângulos são congruentes.

- Tente encontrar triângulos isósceles. Olhe para o diagrama de provas e os procure. Se encontrar algum, provavelmente usará os teoremas "se–lados–então–ângulos" ou "se–ângulos–então–lados" em algum momento da prova.
- Procure retas paralelas no diagrama de prova ou nos dados. Se encontrar algum, você provavelmente usará um ou mais teoremas das retas paralelas.
- Procure e trace mais raios. Observe cada raio de um círculo e marque todos os congruentes. Trace novos raios até pontos importantes do círculo, mas não trace um raio sem propósito.
- Use todos os dados. Os autores de livros de geometria não colocam dados irrelevantes em provas, então pergunte-se por que cada um deles está ali. Tente colocar cada dado na coluna de declarações e escreva outra a seguir, mesmo que não saiba como isso o ajudará.
- Use a lógica *"se... então"*.

Para cada justificativa, verifique:

- Todas as ideias da cláusula *se* aparecem na coluna de declarações em algum lugar *acima da linha que você está verificando*.
- A única ideia da cláusula *então* também aparece na coluna de declarações *na mesma linha*.

Você também pode usar essa estratégia para descobrir qual justificativa usar primeiro.

- Trabalhe de trás para a frente. Se ficar confuso, pule para o final da prova e trabalhe ao contrário. Depois de olhar para a conclusão da *prova*, suponha uma justificativa para ela. Em seguida, use sua lógica se–então para descobrir a antepenúltima declaração (e assim por diante).
- Pense como um computador. Em uma prova de duas colunas, cada passo da cadeia lógica deve ser expressado, mesmo que seja a coisa mais óbvia do mundo. Fazer uma prova é como se comunicar com um computador: ele não entenderá a menos que tudo seja explicado com precisão.
- Faça algo. Antes de desistir de uma prova, coloque no papel o que entendeu. É notável como colocar algo no papel desencadeia outra ideia, depois outra, e depois outra. Antes que perceba, você terminou a prova.

Geometria Para leigos

SÍMBOLOS GEOMÉTRICOS COMUNS

Utilizar símbolos geométricos economiza tempo e espaço ao escrever provas, propriedades e fórmulas de cálculo. Os símbolos mais comumente usados e seus significados são:

Símbolo	**Significado**
$\angle$	Ângulo
$\overset{\frown}{AB}$	Arco *AB*
$m\overset{\frown}{AB}$	Medida do arco *AB*
$\overleftrightarrow{AB}$	Reta *AB*
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta *AB*
$\overline{AB}$	Segmento de reta *AB*
AB	Comprimento do segmento de reta *AB*
$\cong$	*Congruência*
$^\circ$	*Grau*
$\parallel$	*Paralelismo*
$\perp$	*Perpendicularidade*
$\sim$	*Similaridade*
Δ	*Triângulo*